ANALES DE LA
Academia de Ciencias de Cuba

CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

Artículo original de investigación

Caracterización y cálculo de soluciones de problemas de optimización con múltiples funciones objetivos

Gemayqzel Bouza Allende [1*] https://orcid.org/0000-0003-4457-9360
Ernest Quintana Aparicio [2] https://orcid.org/0000-0003-0331-8527
Christiane Tammer [3] https://orcid.org/0000-0002-4446-9789

[1] *Facultad de Matemática y Computación. Universidad de La Habana. La Habana, Cuba*
[2] *Instituto de Matemática. Universidad Técnica de Ilmenau. Ilmenau, Alemania*
[3] *Instituto de Matemática. Universidad Martin Luther, Halle-Wittenberg. Halle, Alemania*

**Autor para la correspondencia:* gema@matcom.uh.cu

Revisores

Ricardo Abreu Blaya
Facultad de Matemática. Universidad Autónoma de Guerrero. Guerrero, México

Luis Alberto Montero Cabrera
Facultad de Química, Universidad de La Habana. La Habana, Cuba

Editor

Amanda Gómez Bahamonde
Academia de Ciencias de Cuba. La Habana, Cuba

Traductor

Yoan Karell Acosta González
Academia de Ciencias de Cuba. La Habana, Cuba

RESUMEN

Introducción: En muchas aplicaciones se tiene que uno o varios decisores optimizan varias funciones objetivos. Los paradigmas que han descrito este tipo de situaciones han sido 3: los problemas de 2 niveles, en los cuales la mejor opción ha dependido de la decisión que han tomado otros agentes, simultáneamente o no; los problemas multiobjetivo con orden variable, aquellos en que un decisor ha tenido varios criterios de optimización combinados y la comparación entre 2 puntos dado por un cono que no varía y los problemas de optimización conjunto evaluada que corresponde al caso en que los valores de la función sean conjuntos. El objetivo de este trabajo fue presentar nuevas caracterizaciones de las soluciones de estos problemas y proponer algoritmos que hallen estos puntos. **Métodos:** Demostraciones matemáticas y experimentación numérica. **Resultados y discusión:** Caracterización de las soluciones del problema de múltiples líderes y seguidores disjuntos en el caso genérico. Propuesta de un algoritmo inexacto de gradiente proyectado para problemas multiobjetivo con orden variable, estudio de su convergencia. Generación de un conjunto de problemas prueba para modelos multiobjetivo con orden variable. Caracterización mediante una regla tipo ***Fermat*** de las soluciones de problemas de optimización conjunto evaluada. Propuesta de algoritmo de máximo descenso para problemas de optimización conjunto evaluada y estudio de su convergencia. Estimación del subdiferencial de ***Clarke*** para funciones marginales. En conclusión, al caracterizar las soluciones de los problemas tratados bajo hipótesis más suaves, se tuvo un mejor conocimiento de la estructura del conjunto solución. Este hecho fue vital para la solución numérica de dichos modelos. Los algoritmos ya propuestos en este trabajo han arrojado resultados que en muchos casos han superado los conocidos en la literatura al requerir un menor número de operaciones y alcanzar soluciones de buena

Premio Nacional Anual de la Academia de Ciencias de Cuba, 2020

calidad. Su convergencia fue analizada también teóricamente, lográndose bajo hipótesis no muy restrictiva.

Palabras clave: algoritmos tipo máximo descenso; genericidad; problemas de optimización con varios objetivos; reglas tipo Fermat

Characterization and computation of the solutions of optimization problems with multiple objective functions

ABSTRACT

Introduction: In many applications, one or many decision makers optimize several objective functions. Three important paradigms that describe these situations are bi-level problems, in which the best option depends on the decision that other agents make simultaneously or not; multiobjective problems with variable order, that is, a decision maker has several combined optimality criteria and the comparison between 2 points is given by a cone that is, in general, non-constant, and set-valued optimization problems, which correspond to the case in which the function values are sets. In this work we present new characterizations of the solutions to these problems and propose algorithms to find these points. **Methods:** Mathematical demonstrations, numerical experimentation. **Results and discussion:** For the problem of multiple disjoint leaders and followers a characterization of the solutions in the generic case was provided. An inexact projected gradient algorithm for multiobjective problems with variable order was proposed and its convergence was studied. A way of generating test problems for multiobjective models with variable order was obtained. Characterization of the solutions of set-operation optimization problems via a Fermat-type rule. A steepest descent algorithm for set-test optimization problems was proposed and its convergence was studied. Estimation of the Clarke subdifferential for marginal functions. It is concluded that the obtained characterizations of the solutions of the problems improve the results of the literature. This better knowledge of the structure of the solution set is very helpful also for an algorithmic viewpoint. The algorithms already proposed have yielded results that in many cases are better than those of the literature. Indeed, they computed well using fewer operations. Their convergence was also theoretically analyzed. It shall be remarked that not very restrictive hypotheses were needed.

Keywords: steepest descent type algorithm; genericity; optimization problems with multiple objective functions; Fermat rule

INTRODUCCIÓN

Existen múltiples situaciones en que es necesario escoger entre varias, la mejor opción. Los modelos de optimización min f (x) sujeto a $x \in M$ han descrito muchos de estos casos, donde M es el conjunto de soluciones factibles y está formado por las opciones que se podrían escoger. La mejor opción estaría dada por el punto x* tal que $f(x) \geq f(x^*)$, para todo $x \in M$. Sin embargo, en problemas como el tratamiento de imágenes, el manejo óptimo de recursos en ecoparques, la distribución de la demanda eléctrica entre los productores y la determinación de sus precios, el criterio de comparación está dado por la combinación de varias funciones que pueden depender de uno o de varios decisores. De ahí la importancia del estudio de las propiedades de las soluciones de estos tipos de problemas y la creación de algoritmos numéricos para su solución.

La investigación desarrollada se enmarcó en el área de la optimización. Se asumió que hay varias funciones objetivo ya sea relacionada con un solo decisor o con varios. Si los decisores tienen jerarquía se tienen problemas de múltiples líderes y seguidores. El modelo sería resolver para k=1...N (fórmula 1)

En este trabajo se consideró el caso en que las funciones vil (x,y) solo dependieran de yil, es decir la variable asociada al problema del seguidor l del líder i.

Cabe destacar que este no es el único caso en el cual aparecen varios criterios ya que un mismo decisor puede tener

$$\min_{x_l, y_l} f^i(x,y) \; sujeto \; a \; g^i(x,y) \le 0, \qquad para \; l = 1, \ldots L^i$$

$$y \; resuelve \min_{y_l^i} \phi_l^i(x,y), sujeto \; a \; v_l^i(x,y) \le 0$$

$$\text{donde para } i = 1, \ldots N, l - 1, \ldots L^i, f^i: R^{n+m} \to R, g^i: R^{n+m} \to R^{q^i}, \phi_l^i: R^{n+m} \to R, v_l^i: R^{n+m} \to R^{s_l^i} \tag{1}$$

varias funciones a optimizar. Esta situación corresponde a los problemas multiobjetivo. Las funciones pueden ser univaluadas (caso clásico) o multievaluadas, (problema de la optimización conjunto evaluada). El problema es: (fórmula 2)

$$\min F(x) \;\; sujeto \; a \; x \in M \tag{2}$$

y representa el caso multiobjetivo si F:M→Rm y F:M → 2Rm para el caso multivaluado.

El problema objeto de estudio asumió la existencia de un orden en el espacio dado por una aplicación punto conjunto, K. Un punto x* sería solución si no existiera x ∈ M: f (x) – f (x*) ∈ - K (x*), f (x) ≠ f (x*), en el caso univaluado. En el caso multivaluado se definieron 2 tipos de soluciones la inferior dada por la no existencia de un punto factible tal que F(x*)⊂F(x)+K y F(x*)≠F(x) y la superior en que la condición es F(x)⊂F(x*)-K F(x*)≠F(x).

Los 3 problemas presentados fueron complejos. Una de las dificultades de tener líderes y seguidores es que hallar un punto factible implica resolver un problema de optimización que es, en general, NP-duro. Es por ello que en la práctica se sustituyeron los problemas del nivel inferior por una condición necesaria, el problema extendido. Es sabido que la solución de estos problemas no ha sido equivalente en general. Otras dificultades han estado relacionadas con la no unicidad de la solución en el nivel inferior, para más detalles, ver Dempe S, *et al.* [1,2]

Caracterizar la solución de un problema multiobjetivo bajo orden variable ha conllevado la condición adicional de que el conjunto de comparación cambia en cada paso. Esta dificultad se ha traducido en hipótesis y técnicas más complejas para obtener las condiciones de optimización y la convergencia de los algoritmos. Un survey sobre el tema se encuentra en Eichfelder G. [3] Otra generalización del problema multiobjetivo ha sido el modelo de la optimización conjunto evaluada. La relación de orden ha estado dada por la comparación de conjuntos, ver Köbis E, *et al.* [4,5] En cuanto a los métodos numéricos, en Aussel D, *et al.* [6] se propuso un algoritmo altamente costoso para calcular conceptos de solución muy fuertes.

Tener varias funciones objetivos ha implicado lidiar con problemas complejos pero de alta aplicabilidad. En particular los problemas tipo múltiples líderes y seguidores han descrito situaciones relacionadas con importantes problemas económicos, ver Aussel D, *et al.* [6] y Ramos M, *et al.* [7] Los problemas de optimización multiobjetivo con orden variable han tenido aplicación en la medicina y la economía como se reportó en Engau A [8] Wiecek MM. [9] Los problemas de optimización conjunto evaluada también han tenido aplicación, ver Bao T, *et al.* [10] por su relación con la obtención de soluciones robustas.

El estudio realizado a los problemas aquí presentados tuvo como objetivo ofrecer nuevas caracterizaciones de las soluciones tanto desde un punto de vista teórico como numérico. Se obtuvieron nuevas condiciones necesarias que debe cumplir las soluciones y algoritmos que las calculan y que convergen bajo condiciones poco restrictivas.

MÉTODOS

Para desarrollar la investigación se analizó la bibliografía sobre el tema. Los resultados referentes a la genericidad se basaron en la teoría del punto crítico dada en Jongen H, *et al.* [11] que se generalizó a este problema más difícil. Se probaron resultados que permitieron la caracterización de las soluciones basados en la diferenciación de Mordukhovich.

Los algoritmos se basan en determinar una dirección que permita mejorar el valor de la función objetivo en cada iteración. El próximo punto se generó usando un tamaño de paso en esa dirección que garantizara una mejoría adecuada.

RESULTADOS

Esta parte se divide en 3 subsecciones. En la primera se mostrarán los resultados relativos al problema de múltiples líderes y seguidores, en la segunda aquellos correspondientes al problema multiobjetivo univaluado y finalmente los obtenidos para problemas multievaluados.

Problemas de múltiples líderes y múltiples seguidores

Como se había descrito en la introducción, el problema objeto de estudio es: (fórmula 3)

donde para i = 1,...N, l − 1,...Li, fi: Rn + m → R, gi: Rn + m → R q i, ϕ il: R n + m →R,vil: Rmil → Rsli se sustituyó el problema del nivel inferior por una condición necesaria tipo Karush Kuhn -Tucker teniéndose el llamado modelo extendido (fórmula 4)

$$\min_{x_l, y_l} f^l(x,y)\ sujeto\ a\ \ g^l(x,y) \le 0, \qquad para\ l = 1, \dots L^l$$

$$y\ resuelve \min_{y_l^i} \phi_l^i(x,y), sujeto\ a\ v_l^i(y_l^i) \le 0$$

(3)

$$\min_{x_l, y_l} f^i(x,y)\ sujeto\ a\ \ g^i(x,y) \le 0, \qquad para\ l = 1, \dots$$

$$\nabla_{y_l^i} \phi_l^i(x,y) + \sum_{j=1 \dots s_l^i} \lambda_{l,j}^i \nabla_{y_l^i}\ v_{l,j}^i(y_l^i) = 0$$

$$0 \le \lambda_{l,j}^i \perp v_{l,j}^i(y_l^i) \le 0$$

(4)

En Aussel D, *et al.* [12] se estudió este problema. Para ello, primero se definió el concepto de problema regular el cual partió del cumplimiento de 3 condiciones: la regularidad del conjunto de soluciones factibles, que ciertos multiplicadores no son cero y que las Hessianas de ciertos lagrangianos son no singulares.

El concepto de problema regular definido permitió garantizar que los puntos de mínimo local del problema extendido fueran mínimos locales del problema original si son factibles del mismo. Este resultado no es válido si la primera condición no se cumple. Además, se probó que esta regularidad garantizaba, en el caso convexo, la equivalencia entre el modelo y el enfoque extendido. Este resultado ha permitido considerar el problema extendido y resolver la colección de modelos con restricciones de complementariedad resultante. Cabe destacar que estos problemas son complejos, pero la condición de regularidad ha implicado que las soluciones sean 0 de un sistema no lineal cuyo Jacobiano es no singular. Esta condición ha garantizado que los algoritmos tipo Newton converjan cuadráticamente.

Los problemas de esta clase han estado caracterizados por un vector de funciones. Al espacio se le asoció la topología fuerte C^S. Como se sabe, un conjunto es genérico si es intersección a lo más de numerable de conjuntos abiertos y densos. La regularidad definida se cumple en un conjunto genérico, que en esta topología resulta ser una clase amplia y representativa de problemas. Este hecho es muy ventajoso, dado el buen comportamiento de los algoritmos numéricos que esta clase garantiza.

En este sentido se probó un teorema de estabilidad y otro de perturbación. El primer resultado garantizó que si un problema es regular también lo serían aquellos problemas definidos luego de adicionar funciones cuya norma y la de sus derivadas hasta el cuarto orden sean suficientemente pequeñas. Por otro lado, se probó que todo problema P es aproximable por una sucesión de problemas regulares que convergen a él respecto a la topología fuerte. Este resultado se basó en un teorema que planteó una manera de perturbar las funciones involucradas, para lograr un modelo regular, excepto en un conjunto de medida de Lebesgue igual a 0.

Propuestas de algoritmos para resolver el problema de optimización con orden variable

Este problema ha consistido en hallar un punto x* tal que si existiera otro punto factible x de forma que F(x)-F(x*)∈-K(x*), entonces F(x*)=F(x). El punto x* se llama punto de mínimo. El problema de orden variable incluyó como caso particular al problema de optimización vectorial que aparece cuando K(x) es constante. Este modelo es a su vez una generalización del ya complejo problema de la optimización multiobjetivo (K={y∈Rm, y≥0}).

Para este tipo de problemas se propuso en Bouza Allende G, et al. (13) un algoritmo tipo gradiente proyectado inexacto. Se consideró el caso en que el conjunto de soluciones factibles era convexo y K(x) es un cono convexo, cerrado, puntiagudo y de interior no vacío. La idea de este método consistió en buscar una dirección que garantizara, al menos localmente un decrecimiento de la función objetivo. Luego se realiza una búsqueda tipo armijo para lograr una disminución adecuada de la función en la próxima iteración. A diferencia del caso exacto, para hallar la dirección no hay necesidad de resolver completamente el problema de optimización auxiliar que se define. Basta encontrar una solución aproximada pues brinda el decrecimiento deseado. De esta forma se realizaron menos operaciones. Se probó que los puntos de acumulación satisficieron la condición necesaria de optimización y bajo convexidad de la función objetivo se garantizó su convergencia al óptimo. Como corolario se definió y se probó la convergencia del algoritmo de gradiente proyectado exacto y el algoritmo inexacto para el caso irrestricto.

A partir de la existencia de varios algoritmos para problemas de orden variable, era necesario probar su eficacia en un conjunto de modelos con distintas características. En la literatura los ejemplos numéricos han sido muy pocos, ver Eichfelder G. [3] De ahí que se propuso un procedimiento para generar modelos prueba para el problema de optimización con orden variable con solución conocida. Este enfoque ha permitido definir problemas convexos y no convexos. De esta forma se pudo validar el comportamiento de los algoritmos en esta clase, para más detalles ver Bouza Allende G, *et al.* [14]

Problema de la optimización conjunto evaluada

Este modelo consiste en, dada una función que a cada punto le hace corresponder un cierto conjunto, hallar el elemento del dominio cuya imagen sea la mejor de acuerdo a un cierto criterio. Se consideraron 2 formas de definir la relación de orden que ha caracterizado la optimalidad, la inferior y la superior, ver Kuroiwa D, et al. (15) En estos casos, la condición de optimalidad está dada por la no existencia de un punto x tal que F(x*)≠F(x) y F(x*)⊂F(x)+K(inferior) y F(x)⊂F(x*)-K (superior).

Para el problema en cuestión se obtuvieron en Bouza Allende G, et al. (16) reglas tipo Fermat basadas en el subdiferencial de Mordukhovich, que caracterizaron los puntos cuya imagen ha correspondido a conjuntos minimales. Se probaron sendos resultados para las relaciones de orden inferior y superior. La función objetivo tiene dominio en espacios de Banach. Como ventaja con respecto a resultados similares en la literatura, se tiene que en esta propuesta no se precisa de hipótesis como convexidad o compacidad, las cuales pueden ser restrictivas en ejemplos prácticos.

En Bouza Allende G, et al. (17) se asumió que la función objetivo tiene la forma F(x)={f1(x),...fn(x)}⊂Rm. Este tipo de modelos aparece al hallar soluciones robustas en un problema de optimización vectorial con incertidumbre. Para este importante caso particular se propuso un algoritmo tipo máximo descenso. Primero se obtuvieron condiciones necesarias de optimalidad que permitieran una mejor caracterización de las soluciones. Se probó la convergencia del algoritmo y se mostró su comportamiento en ejemplos académicos.

Durante la investigación realizada se utilizaron las llamadas funciones marginales para la caracterización de soluciones de problemas conjunto evaluados. Motivados por su aplicabilidad, se obtuvo una estimación del subdiferencial de Clarke para estas funciones en espacios de Banach, ver Bouza Allende G, et al. (18) Los resultados existentes partían de funciones cuyo domino era un espacio de Asplund. Este resultado se tendría ahora en un caso más general. Esta nueva caracterización del subdiferencial permitiría refinar las condiciones tipo regla de Fermat en espacios de Banach y con ello obtener mejores caracterizaciones del conjunto de soluciones óptimas.

Los resultados obtenidos han respondido a varias preguntas abiertas en el área de la optimización. En el caso del problema de múltiples líderes y seguidores, la genericidad demostrada en Aussel D, *et al.* [12] ha sido importante en la práctica, ya que en muchos modelos ha existido incertidumbre con respecto a los valores de ciertos parámetros involucrados en su definición. Se ha probado que si la variación con respecto al problema original es pequeña, la regularidad debe seguir cumpliéndose. La condición de aproximación ha permitido perturbar los problemas no regulares y tener modelos en los cuales los métodos conocidos deben funcionar adecuadamente.

Este tipo de resultados de genericidad se han desarrollado para el problema de la programación no lineal [11] y el problema de optimización con restricciones de complementariedad. [19] En el caso del problema de 2 niveles (un líder y un seguidor) se han obtenido resultados para el caso en que el seguidor tenga solo una variable de decisión, ver Jongen HT, *et al.* [20] Para ello se habían extendido los resultados anteriores. Pero esta condición no basta cuando hay más de una variable en el nivel inferior o más de 2 decisores. En este caso se hizo necesario considerar un sistema adicional, de ahí la necesidad de derivadas de orden 4.

Con esta investigación, se obtuvo la genericidad para problemas con un solo líder y un solo seguidor. Este resultado completó el estudio de este tipo iniciado en Bouza Allende G, *et al.* [21] donde solo se demostró que para casi toda perturbación cuadrática se cumple la regularidad.

Desde el punto de vista numérico la regularidad definida ha sido ventajosa. Los algoritmos que convergen bajo esta hipótesis lo harán para una clase amplia de problemas. En particular, los métodos tipo Newton convergen con orden cuadrático y si se combinan con estrategias tipo Gauss-Seidel, podrían resolver problemas parciales regulares de dimensión relativamente pequeña en cada paso. Además, de poder resolver modelos de este tipo que surgieran en las aplicaciones. Un ejemplo en salud es el problema de determinación de fuentes emisoras de señales en electroencefalogramas y su dinámica temporal. Este modelo se describió como un problema de 2 niveles: en el problema de nivel inferior se minimizó el error de estimar la fuente en cada momento; en el nivel superior, se minimizó el error correspondiente a utilizar una cierta matriz para establecer la ecuación de recursividad. En economía un ejemplo es el problema de determinación de precios de los planes de electricidad que ofertarán los productores a sus clientes y los precios a los que venderán la energía que producen a los otros líderes.

Con respecto al problema multiobjetivo con orden variable los algoritmos propuestos en Bouza Allende G, *et al.* [13] convergen bajo hipótesis esperadas. De hecho, si se considera el problema vectorial, las mismas corresponden a las asumidas en Fukuda EH, *et al.* [22] Por otra parte, las condiciones supuestas para la convergencia de los algoritmos de máximo descenso y Newton estudiados en Bello Cruz JY, *et al.* [23] Bento GC, *et al.* [24] han sido similares a las utilizadas en este caso en que se ha utilizado menos información. El generador de problemas prueba con solución conocida, permite chequear el comportamiento de los algoritmos. Además, se podría comparar si hay diferencias significativas en cuanto a tiempo y convergencia entre problemas convexos y no convexos.

Los resultados obtenidos para el problema de optimización conjunto evaluada fueron también interesantes. La regla de Fermat obtenida en Bouza Allende G, *et al.* [(16)] ha sido válida para funciones definidas en espacios de Banach y a diferencia de los resultados anteriores no se ha precisado que la función objetivo sea convexa o defina conjuntos compactos. Si bien es un caso particular, los métodos existentes no han funcionado bien, ver Köbis E, *et al.* [(5)] La simplicidad del algoritmo de máximo descenso propuesto en Bouza Allende G, *et al.* [(17)] brindó un enfoque ajustado al problema que se trata. Las propiedades del subdiferencial de Clarke obtenidas en Bouza Allende G, *et al.* [(18)] en este caso tan general ha permitido abrir nuevas líneas de investigación.

Conclusiones

Los resultados obtenidos han brindado nuevas caracterizaciones de las soluciones de los problemas tratados. Tiene muchas implicaciones, pues permitiría la propuesta de nuevos algoritmos y mejorar los tratados en este estudio.

Con esta investigación se abren nuevos temas de investigación. En particular, las ideas usadas en las pruebas de los resultados de genericidad pueden aplicarse al problema en que hay un líder y varios seguidores considerando que las posibles decisiones dependen de otros actores. También se pueden implementar algoritmos tipo Gauss Seidel para evitar trabajar con modelos de grandes dimensiones como en el caso de las aplicaciones en neurología. De forma similar se usarán los algoritmos propuestos para resolver, numéricamente, problemas de la optimización multiobjetivo y conjunto evaluada que surgen en las aplicaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

1. Dempe S. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constrains. Optimization. 2003; 52(3):333-59. Doi: https://doi.org/10.1080/0233193031000149894
2. Dempe A, Zemkoho A. Bilevel Optimization. Springer Optim. 2020;161.
3. Eichfelder G. Variable ordering structures in vector optimization. Berlin. Springer. 2014.
4. Köbis E y Köbis MA. Treatment of set order relations by means of a nonlinear scalarization functional: a full characterization, Optimization. 2016;65:1805-27.
5. Köbis E, Thanh Le T. Numerical procedures for obtaining strong, strict and ideal minimal solutions of set optimization problems. Anal. Optim. 2018;2:423-40.
6. Aussel D, Van KC, Salas D. A single-leader-disjoint-follower approach of electricity contract model. Preprint. 2021.
7. Ramos M, Boix M, Aussel D, Montastrucy L, Domenech S. Water integration in eco-industrial parks using a multi-leader-follower approach. Computers Chemical Engineering. 2016;87:190-207.
8. Engau A. Variable preference modeling with ideal-symmetric convex cones. J Global Optim. 2008;42:295-311.
9. Wiecek MM. Advances in cone-based preference modeling for decision making with multiple criteria. Decis Mak Manuf Serv. 2007;1:153-73.
10. Bao T, Mordukhovich B. Set-valued optimization in welfare economics. En: Advances in mathematical economics. Tokyo. Adv. Math. Econ. 2010;13:113-53.
11. Jongen H, Jonker P, Twilt F. Nonlinear Optimization in Finite Dimensions. Morse Theory, Chebyshev Approximation, Transversality, Flows, Parametric Aspects, Nonconvex Optim. Kluwer, Dordrecht. 2000; 47.
12. Aussel D, Bouza Allende G, Dempe S, Lepaul S. Genericity analysis of multi-leader-disjoint-followers game. SIAM J. OPTIM. 2021;31(3):2055-79.
13. Bouza Allende G, Bello Y. On inexact Projected Gradient Methods for solving Variable Vector Optimization problems. Optimization and Engineering. DOI: https://doi.org/doi10.1007?s11081-020-09579-8
14. Bouza Allende G, Hernández Escobar D, Rückmann JJ. Some properties of K-convex mappings in variable ordering settings. Optimization. 2021.1-22.
15. Kuroiwa D, Tanaka T, Ha TXD. On cone convexity of set-valued maps. Nonlinear Anal. 1997;30(3):1487-96.
16. Bouza Allende G, Quintana E, Tammer C, Tuan VA. The Fermat rule for set Optimization problems with Lipschitzian set valued mappings, joint with and Journal of Non Linear and Convex. Analysis. 2020;21(5):1137-74.
17. Bouza Allende G, Quintana E, Tammer C. A Steepest Descent Method for Set Optimization Problems with Set-Valued Mappings of Finite Cardinality. Journal of Optimization Theory and Applications. 2021. 1-33.
18. Bouza Allende G, Quintana E, Tammer C. On Clarke subdifferential of marginal functions. Applied Set Valued Analysis and Optimization. 2021;13(3):281-92.
19. Scholtes S, Stöhr M. How stringent is the linear independence assumption for mathematical programs with stationary constraints? Math. Oper. Res. 2001;26:851-63.
20. Jongen HT, Shikhman V. Bilevel optimization: on the structure of the feasible set, Math. Program. 2012;136:65-89.
21. Bouza Allende G, Still G. Solving bilevel programs with the KKT-approach. Math. Program. 2013;138:309-32.
22. Fukuda EH, Graña Drummond LM. Inexact projected gradient method for vector optimization. Comput Optim Appl. 2013;54:473-93.
23. Bello Cruz JY, Bouza Allende G. A steepest descent-like method for variable order vector optimization problems. J Optim Theory Appl. 2014;162:371-91.
24. Bento GC, Bouza Allende G, Pereira YR. A Newton-like method for variable order vector optimization problems. J Optim Theory Appl. 2018;177: 201-21.

Recibido: 19/06/2022
Aprobado: 03/09/2022

Agradecimientos

Este trabajo es un compendio de resultados fruto de investigaciones realizadas con el profesor Stephan Dempe de la Universidad de Freiberg, el profesor Yunier Bello Cruz de la Universidad de Northern Illinois, el profesor Jan Rueckman de la Universidad de Bergen, Daniel Hernández Escobar de la Universidad de Bergen, Sebastien Lepaul de Electricité de France, Francia, a quienes se les agradece su colaboración durante el desarrollo de este trabajo.

Conflictos de interés

Los autores declaran la no existencia de conflicto de intereses.

Contribuciones de los autores

- Conceptualización: Gemayqzel Bouza Allende
- Investigación: Gemayqzel Bouza Allende, Christiane Tammer, Ernest Quintana
- Metodología: Gemayqzel Bouza Allende
- Administración del proyecto: Gemayqzel Bouza Allende
- Supervisión: Gemayqzel Bouza Allende, Christiane Tammer, Ernest Quintana
- Validación: Gemayqzel Bouza Allende, Christiane Tammer, Ernest Quintana
- Redacción-borrador original: Gemayqzel Bouza Allende
- Redacción-revision y edición: Gemayqzel Bouza Allende

Financiación

Este trabajo es un compendio de resultados parcialmente auspiciados por los proyectos PN223LH-10-005 Desarrollo de nuevos modelos y métodos matemáticos para la toma de decisiones y PGMO Multi-leader-follower approach for energy pricing problems competitive interactions producers/aggregators and producers/smart grid operators, financiado por la Fundación Gaspar Monge(Francia).

Cómo citar este artículo

Bouza Allende G, Quintana Aparicio E, Tammer C. Caracterización y cálculo de soluciones de problemas de optimización con múltiples funciones objetivos. An Acad Cienc Cuba [internet] 2023 [citado en día, mes y año];13(1):e1266. Disponible en: http://www.revistaccuba.cu/index.php/revacc/article/view/1266