Revista Anales de la Academia de Ciencias de Cuba Vol. 7 No. 1

Refinamiento de la velocidad de convergencia de los esquemas de Linealizaci· n Local para ecuaciones diferenciales deterministas, aleatorias y estoc§sticas.

Entidad Ejecutora Principal: Instituto de Cibernética, Matemática y Física (ICIMAF)

Autor Principal:
Juan Carlos Jiménez Sobrino (ICIMAF, Cuba).

Otros Autores:
Felix Carbonell (Biospective Inc., Montreal, Canada)
Hugo de la Cruz (FGV, Escola de Matematica Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil)

Colaborador: Lic. Liuba María Pedroso (ICIMAF, Cuba)

Otras entidades participantes: Biospective Inc., Montreal, Canada; McGill University, Montreal, Canada; Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil.

Autor para la correspondencia:
Juan Carlos Jim®nez Sobrino,
Departamento de Matem§tica Interdisciplinaria,
Instituto de Cibern®tica, Matem§tica y F²sica (ICIMAF),
Calle 15, e/ C y D, Vedado, Ciudad de la Habana,
e-mail: jcarlos@icimaf.cu

Resumen. Las ecuaciones diferenciales han sido ampliamente usadas para la modelación de la evolución temporal de diversos procesos tecnológicos, naturales y sociales. Como en general dichas ecuaciones no tienen solución exacta conocida resulta indispensable el uso de integradores numéricos eficientes que aproximen convenientemente las mencionadas soluciones. Un ejemplo de tales integradores son los denominados métodos de Linealización Local los cuales se caracterizan por tener un adecuado equilibrio entre precisión numérica y coste computacional, y se distinguen por la preservación de una variedad de propiedades dinámicas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Para alcanzar un óptimo equilibrio entre precisión numérica y coste computacional se necesita un estudio teórico refinado de la velocidad de convergencia de cada implementación numérica factible del método, es decir, de los llamados *esquemas de Linealización Local*. En esta propuesta de premio se presentan los resultados alcanzados en ésta dirección durante varios años los cuales han sido publicados por los autores en cinco revistas internacionales especializadas en la temática.

Antecedentes: El autor principal ha recibido con antelaci· n otros dos Premios ACC relacionados con el objeto de estudio de la presente propuesta. En el 2003 fue premiado el estudio de varias propiedades del m®todo de Linealizaci· n Local para la integraci· n e cuaciones diferenciales ordinarias y estoc§sticas incluyendo el an§lisis de la convergencia de las discretizaciones Lineales Locales. En el 2006 fue premiada la estimaci· n de modelos de espacio de estado continuo-discreto con ruido multiplicativo usando el m®todo de Linealizaci· n Local. Ninguno de esos Premios incluye el refinamiento de la velocidad de convergencia de los esquemas de Linealizaci· n Local para ecuaciones diferenciales deterministas, aleatorias y estoc§sticas que se presentan en esta propuesta.

COMUNICACIÓN CORTA DEL RESULTADO

Resumen. Las ecuaciones diferenciales han sido ampliamente usadas para la modelación de la evolución temporal de diversos procesos tecnológicos, naturales y sociales. Como en general dichas ecuaciones no tienen solución exacta conocida resulta indispensable el uso de integradores numéricos eficientes que aproximen convenientemente las mencionadas soluciones. Un ejemplo de tales integradores son los denominados métodos de Linealización Local los cuales se caracterizan por tener un adecuado equilibrio entre precisión numérica y coste computacional, y se distinguen por la preservación de una variedad de propiedades dinámicas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Para alcanzar un óptimo equilibrio entre precisión numérica y coste computacional se necesita un estudio teórico refinado de la velocidad de convergencia de cada implementación numérica factible del método, es decir, de los llamados *esquemas de Linealización Local*. En esta propuesta de premio se presentan los resultados alcanzados en ésta dirección durante varios años los cuales han sido publicados por los autores en cinco revistas internacionales especializadas en la temática.

Introducción. Las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) surgen como modelos matemáticos naturales para la descripción de procesos aleatorios en una variedad de campos. Por ejemplo, para modelar la coagulación de la sangre [8], la energética celular [24], la actividad eléctrica de las masas neuronales [19,23] y los osciladores ruidosos en una diversidad de sistemas físicos [9], entre muchos otros. La simulación de las trayectorias de estos sistemas aporta un mayor conocimiento de su comportamiento cualitativo y dinámica [1, 3, 10] lo que constituye una de las principales motivaciones para la construcción de integradores numéricos fuertes para éstas ecuaciones. Por otro lado, la evaluación de las integrales funcionales de Wiener y la estimación de los procesos de difusión son fundamentales para la resolución de problemas de la física matemática, biología, finanzas y otros campos [2,20,22]. En la solución de este tipo de problemas, los integradores numéricos débiles son una herramienta importante [2,10,17]. Similarmente, el renovado interés por la simulación de las ecuaciones diferenciales aleatorias (EDA) se debe a la modelación matemática de una variedad de complejos procesos físicos, biológicos y tecnológicos [18,21], y al rol que las EDA desempeñan en la teoría de los sistemas dinámicos aleatorios [1]. Más conocida es la importancia de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en la descripción de la propagación de epidemias, de la dinámica de poblaciones en ecología, de las trayectorias de misiles y satélites, etc. Como en general las mencionadas ecuaciones no tienen solución exacta conocida resulta indispensable el uso de integradores numéricos eficientes que aproximen convenientemente las mencionadas soluciones. Un ejemplo de tales integradores son los denominados métodos de Linealización Local los cuales se caracterizan por tener un adecuado equilibrio entre precisión numérica y coste computacional, y se distinguen por la preservación de una variedad de propiedades dinámicas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Este último aspecto es de vital relevancia, siendo bien conocido los resultados espurios que pueden obtenerse de integradores numéricos convencionales y las graves consecuencias que esto produce en la interpretación y análisis de los resultados de las simulaciones en las aplicaciones. En el caso de los integradores de Linealización Local, para alcanzar el deseado equilibrio óptimo entre precisión numérica y coste computacional se necesita un estudio teórico más refinado que el habitual de la velocidad de convergencia de cada implementación numérica factible. A diferencia de los integradores numéricos convencionales, la convergencia de la *discretización Linear Local* asociada al método de Linealización Local no es suficiente para caracterizar la convergencia de sus implementaciones numéricas, es decir, de los llamados *esquemas de Linealización Local*. Esto es así debido a que la *discretización Lineal Local* puede ser implementada de muchas formas y estas implementaciones siempre requieren de aproximaciones adicionales las cuales, obviamente, deben preservar la velocidad de convergencia de la discretización que les da origen. En esta propuesta de premio se reúnen los resultados alcanzados en ésta dirección durante varios años los cuales han sido publicados por los autores en cinco revistas internacionales especializadas en la temática. Para mayor claridad, una descripción de resultados previos sobre las *discretizaciones Lineales Locales* y su convergencia es brevemente presentada. Luego los nuevos resultados sobre la convergencia refinada de los *esquemas de Linealización Local* son puntualizados y resaltados.

Discretizaciones Lineales Locales y convergencia. Por simplicidad, consideremos la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)

(1) $$dx(t) = f\big(x(t)\big)dt + g(t)d\omega(t)$$

para todo *t≥0,* donde *f* y *g* son funciones suaves y *ω* un proceso de Wiener.

La *Discretización Lineal Local Débil* de la solución de (1) se escribe como

$$y_{n+1} = y_n + \mu_n^{\beta} + (\sigma_n^{\beta})^{1/2}\eta_n$$

para todo $t_n = nh$, con *n=0,1,...* y *h>0,* donde μ_n^{β} y σ_n^{β} son la media y la varianza de la EDE lineal que aproxima con orden β débil a (1) en t_{n+1} dado y_n, y η_n es una variable aleatoria simétrica alrededor de la media cero y con varianza 1.

La *Discretización Lineal Local Fuerte* de la solución de (1) se escribe como

$$y_{n+1} = y_n + \mu_n^{\alpha} + \xi_n^{\alpha}$$

para todo $t_n = nh$, con *n=0,1,...* y *h>0,* donde μ_n^{α} es una integral de Riemman y ξ_n^{α} una integral estocástica de Ito definidas ambas por la solución de una EDE semilineal que aproxima con orden α fuerte a (1) en t_{n+1} dado y_n.

Para la Ecuación Diferencial Aleatoria (EDA)

(2) $$dx(t) = f(x(t), \varepsilon(t))dt$$

definida para todo *t≥0,* donde *f* es una función suave y *ε* un proceso estocástico separable, finito y continuo con valores reales, la *Discretización Lineal Local* de la solución de (2) se define por

$$y_{n+1} = y_n + \varphi_n$$

para todo $t_n = nh$, con *n=0,1,...* y *h>0,* donde φ_n es una integral de Riemman dependiente de y_n y del valor del proceso estocástico ε en t_n.

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)

(3) $$dx(t) = f\big(x(t)\big)dt$$

definida para todo *t≥0,* donde *f* es una función suave, la *Discretización Lineal Local* de la solución de (3) se define por

$$y_{n+1} = y_n + \phi_n$$

para todo $t_n = nh$, con *n=0,1,…* y *h>0,* donde ϕ_n es la integral de Riemman tal que $y_n + \phi_n$ es la solución una EDO semilineal que aproxima con orden *p* la solución de (3) en t_{n+1} dado y_n.

Esquemas de Linealización Local y convergencia refinada. En los trabajos previos [4,5,7,11] (que no optan por el Premio ACC 2016) se establecen las condiciones sobre las funciones *f* y *g* para que las *discretizaciones Lineales Locales* y_{n+1} definidas en la sección anterior converjan a las soluciones de sus respectivas ecuaciones diferenciales (1), (2) y (3) con determinada velocidad cuando el tamaño de paso *h* tiende a cero. Sin embargo, a diferencia con los integradores numéricos convencionales, la convergencia de la discretización y_{n+1} asociada al método de Linealización Local no es suficiente para caracterizar la convergencia de sus implementaciones numéricas z_{n+1}, es decir, de los llamados *esquemas de Linealización Local*. Esto es así debido a que las mencionadas implementaciones numéricas siempre requieren de aproximaciones adicionales las cuales, obviamente, deben preservar la velocidad de convergencia de la discretización que les da origen. Más específicamente, para la EDE (1) los *esquemas débiles de Linealización Local* se definen por la expresión recursiva

$$z_{n+1} = z_n + \tilde{\mu}_n^{\beta} + (\tilde{\sigma}_n^{\beta})^{1/2}\eta_n$$

donde $\tilde{\mu}_n^{\beta}$ y $\tilde{\sigma}_n^{\beta}$ son aproximaciones a la media μ_n^{β} y la varianza σ_n^{β}, respectivamente. Análogamente, para la EDE (1) los *esquemas fuertes de Linealización Local* se definen por la expresión

$$z_{n+1} = z_n + \tilde{\mu}_n^{\alpha} + \tilde{\xi}_n^{\alpha}$$

donde $\tilde{\mu}_n^{\alpha}$ y $\tilde{\xi}_n^{\alpha}$ son aproximaciones a las integrales μ_n^{α} y ξ_n^{α}. Similarmente, para la EDA (2) y la EDO (3) los *esquemas de Linealización Local* se definen por

$$z_{n+1} = z_n + \tilde{\varphi}_n$$

y

$$z_{n+1} = z_n + \tilde{\phi}_n,$$

respectivamente, donde $\tilde{\varphi}_n$ y $\tilde{\phi}_n$ son aproximaciones a las integrales φ_n y ϕ_n.

En los trabajos [13,14,15,16], que optan por el Premio ACC 2016, se dan condiciones generales sobre las aproximaciones $\tilde{\mu}_n^{\beta}$, $\tilde{\sigma}_n^{\beta}$, $\tilde{\mu}_n^{\alpha}$, $\tilde{\xi}_n^{\alpha}$, $\tilde{\varphi}_n$ y $\tilde{\phi}_n$ para que sus respectivos *esquemas de Linealización Local* z_{n+1} preserven la velocidad de convergencia de sus correspondientes *discretizaciones Lineales Locales* y_{n+1}. Adicionalmente, en esos trabajos se dan condiciones particulares para los dos tipos más importantes de aproximaciones específicas a las mencionas integrales: las de Padé y las de los subespacios de Krylov. Las demostraciones de los mencionados resultados son matemáticamente muy técnicas y por esa razón no se explicitan en el presente reporte. Es necesario destacar que los resultados de los trabajos [13,14,15,16] son esenciales para construir integradores adaptativos eficientes. Prueba de esto es, por ejemplo, la construcción del esquema adaptativo LLDP45 el cual supera en precisión y velocidad al reconocido esquema Matlab ode45 para EDO (ver [12], que no opta por el Premio ACC 2016). Con los resultados obtenidos en [14,15,16] actualmente se desarrollan esquemas de Linealización Local adaptativos para EDE y EDA con vista a su utilización en la resolución optima de problemas prácticos en una variedad de aplicaciones.

Finalmente, en el trabajo [6] (que también opta por el Premio ACC 2016) se obtienen expresiones explicitas para integrales múltiples de matrices exponenciales. Este resultado general se utiliza en [15] para construir *esquemas débiles de Linealización Local* de la ecuación (1) pero, independientemente de ello, el resultado por sí mismo es de utilidad en otros muchos contextos.

Referencias

1. Arnold, L. Random Dynamical Systems. Springer, Heidelberg, 1998.
2. Blankenship G.L., Baras J.S. Accurate evaluation of stochastic Wiener integrals with applications to scattering in radom media and nonlinear filtering. SIAM J. Appl. Math., 41 (1981) 518-552.
3. Burrage, K., Burrage, P.M., Tian, T.: Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: an overview. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci. 460 (2004) 373–402.
4. Carbonell F., Jimenez J.C., Biscay R.J., Weak local linear discretizations for stochastic differential equations: convergence and numerical schemes, J. Comput. Appl. Math., 197 (2006) 578-596.
5. Carbonell F., Jimenez J.C., Biscay R., de la Cruz H., The Local Linearization method for numerical integration of random differential equations, BIT: Num. Math., 45 (2005) 1-14.
6. Carbonell F., Jimenez J.C., Pedroso L.M., Computing multiple integrals involving matrix exponentials", J. Comput. Appl. Math., 213 (2008) 300-305.
7. de la Cruz H., Biscay R.J., Jimenez J.C., Carbonell F. and Ozaki T., High Order Local Linearization methods: an approach for constructing A-stable high order explicit schemes for stochastic differential equations with additive noise, BIT: Num. Math., 50 (2010) 509--539.
8. Fogelson, A.L.: A mathematical model and numerical method for studying platelet adhesion and aggregation during blood clotting. J. Comput. Phys. 50 (1984) 111–134.
9. Gitterman, M.: The Noisy Oscillator. World Scientific, Singapore, 2005.
10. Higham, D.J.: Stochastic ordinary differential equations in applied and computational. J. Appl. Math. 76 (2011) 449–474.
11. Jimenez J.C., Biscay R., Mora C. and Rodriguez L.M., Dynamic properties of the Local Linearization method for initial-value problems. Appl. Math. Comput., 126 (2002) 63-81.
12. Jimenez J.C., Sotolongo A. and Sanchez-Bornot J.M., Locally Linearized Runge Kutta method of Dormand and Prince, Appl. Math. Comput., 247 (2014) 589-606.
13. Jimenez J.C., Carbonell F., Rate of convergence of local linearization schemes for initial-value problems", Appl. Math. Comput., 171 (2005) 1282-1295.
14. Jimenez J.C., Carbonell F., Rate of convergence of local linearization schemes for random differential equations, BIT: Num. Math., 49 (2009) 357–373.
15. Jimenez J.C., Carbonell F., Convergence rate of weak Local Linearization schemes for stochastic differential equations with additive noise, J. Comput. Appl. Math., 279 (2015) 106-122.
16. Jimenez J.C., de la Cruz H., Convergence rate of strong Local Linearization schemes for stochastic differential equations with additive noise", BIT: Num. Math., 52 (2012) 357-382.
17. E. Platen, N. Bruti-Liberati, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.
18. Sobczyk, K.: Stochastic Differential Equations with Applications to Physics and Engineering. Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.
19. Riera, J.J., Wan, X., Jimenez, J.C., Kawashima, R.: Nonlinear local electro-vascular coupling. Part I: a theoretical model. Hum. Brain Mapp., 27 (2006) 896–914.
20. Shiryaev A.N., Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory, 1999.
21. Sotero, R.C., Trujillo, N.J., Carbonell, F., Jimenez, J.C.: Realistically coupled neural mass models can generate EEG rhythms. Neural Comput. 19 (2007) 478–512.
22. Tuckwell H.C., Stochastic processes in the neurosciences, 1989.
23. Valdes, P.A., Jimenez, J.C., Riera, J., Biscay, R., Ozaki, T.: Nonlinear EEG analysis based on a neural mass model. Biol. Cybern. 81 (1999) 415–424.
24. Veuthey, A.L., Stucki, J.: The adenylate kinase reaction acts as a frequency filter towards fluctuations of ATP utilization in the cell. Biophys. Chem. 26 (1987) 19–28.