Esquemas de subdivisión para generar curvas

Autora principal

Victoria Hernández Mederos[1].

Otros autores

Jorge C. Estrada Sarlabous[1], Lucia Romani[2], Dimas Martínez Morera[3], Luiz Velho[4], Ioannis Ivrissimtzis[5], Rafael Díaz Fuentes[1], Nayla López Gil[1].

Entidades ejecutoras principales

[1]Instituto de Cibernética, Matemática y Física (ICIMAF).

Entidades participantes

[2]Universidad de Milano-Biccoca, Italia.
[3]Universidad Federal de Alagoas, Brasil.
[4]Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA), Brasil.
[5]Durham University, Reino Unido.
[6]Universidad de la Habana (UH).

Autora para correspondencia

Victoria Hernández Mederos.
Departamento de Matemática, Instituto de Cibernética Matemática y Física (ICIMAF).
Calle E, No 309, esquina 15, Vedado, La Habana.
e-mail: vicky@icimaf.cu

Resumen

Este trabajo reúne un conjunto de resultados teóricos que sirven de fundamento para diferentes esquemas de subdivisión que generan tanto curvas planas como curvas definidas sobre una superficie. Para cada esquema propuesto se demuestra rigurosamente la convergencia a una curva límite, llamada curva de subdivisión, y se estudian las propiedades geométricas y diferenciales de estas curvas. Adicionalmente se prueba que ciertos esquemas producen curvas que interpolan o aproximan un conjunto prefijado de puntos y son capaces de reproducir familias distinguidas de curvas como las polinómicas y cónicas. Se estudia también la posibilidad de utilizar parámetros libres para controlar la geometría de la curva de subdivisión.

Si bien los resultados obtenidos son de corte eminentemente teórico, en los trabajos publicados se incluyen algoritmos eficientes para calcular y graficar las curvas de subdivisión. Esto garantiza que las curvas obtenidas a partir de los esquemas propuestos se puedan emplear en la solución de diferentes problemas de la práctica social, entre los cuales se puede mencionar el diseño de piezas, de estructuras o partes de éstas, el cálculo de trayectorias y de curvas offset, la segmentación de imágenes, la animación y la industria de los juegos, entre otros. Los resultados obtenidos se encuentran publicados en cinco artículos de revistas internacionales, tres memorias de eventos nacionales e internacionales y una Tesis de Maestría en Matemática. Además han sido presentados en varios eventos científicos.

Comunicación corta

Introducción.

El diseño geométrico asistido por computadoras, conocido en la literatura científica por sus siglas en inglés, CAGD, se dedica esencialmente al estudio de las curvas, superficies y volúmenes que se emplean para diseñar objetos con el auxilio de las computadoras. Esta disciplina comenzó su desarrollo en la década de 1970 y tiene muchas aplicaciones en áreas de diseño tan diversas como las industrias aeronáutica, naval y automotriz, la producción de dibujos animados y de publicidad y el diseño de procesadores de texto. Estas aplicaciones se basan en el empleo de familias de curvas y superficies, con una definición matemática precisa y con parámetros libres que permiten variar significativamente su forma de manera intuitiva. En sus inicios, las curvas y superficies más empleadas en CAGD fueron las descritas de forma paramétrica (Bezier, B-splines, NURBS). Sin embargo en 1974 G. Chaikin mostró la posibilidad de generar una curva suave a partir de una poligonal empleando un método basado en construir nuevas poligonales con un número creciente de vértices. Si bien la curva obtenida mediante este proceso iterativo resultó ser una curva bien conocida (B-spline cuadrática), la idea de construir curvas como límite de una sucesión de poligonales fue la clave para el nacimiento de los llamados métodos de subdivisión. Estos métodos se emplean hoy en día con mucha efectividad para construir curvas y superficies, definidas como límite de una sucesión de aproximaciones lineales (poligonales o mallas), que se basa en reglas bastante sencillas y fáciles de implementar con poco costo computacional. En la práctica, después de 5 o 6 iteraciones, los esquemas de subdivisión aportan una buena aproximación de la curva o superficie límite que se representa en la pantalla de una computadora.

Los métodos de subdivisión se basan sin embargo en ideas y resultados matemáticos no elementales, que permiten probar rigurosamente las propiedades geométricas de curvas y superficies obtenidas como límite de un proceso iterativo, pero de las cuales se desconoce usualmente su expresión explícita o implícita. Los esquemas de subdivisión estacionarios donde las reglas de subdivisión son lineales están muy bien estudiados en la literatura [DL02], [Sab10]. Entre ellos los más conocidos son el esquema de 4 puntos [DLG87] y el esquema que genera los B-splines polinomiales [LR80].

En este trabajo se presentan diferentes esquemas de subdivisión propuestos por los autores para generar curvas planas y también curvas que viven sobre una superficie. Cada esquema propuesto se basa en resultados teóricos que garantizan la convergencia del proceso iterativo, así como las propiedades geométricas y diferenciales de las curvas generadas. Además, se estudia el efecto de los parámetros libres como asas geométricas para controlar la forma de la curva de subdivisión. Entre los resultados obtenidos se incluyen algoritmos para implementar computacionalmente los esquemas propuestos, así como ejemplos de posibles aplicaciones prácticas. Para facilitar la exposición, los trabajos se agrupan en tres secciones.

Esquemas de subdivisión interpolatorios para generar curvas planas.
En muchos problemas prácticos se requiere construir una curva forzada a pasar por un conjunto de puntos previamente escogidos. Partiendo de un polígono que tiene como vértices los puntos prefijados, los esquemas de subdivisión interpolatorios definen reglas para refinar el polígono inicial, de modo que el proceso converge a una curva que pasa por los puntos escogidos, es decir que los interpola. En la práctica, basta con unos pocos pasos de subdivisión para obtener una curva visualmente suave. El clásico esquema de 4 puntos fue uno de los primeros esquemas interpolatorios propuestos en la literatura [DLG87]. Este esquema lineal y estacionario produce una curva límite suave (C1 continua). En general, los esquemas de subdivisión lineales son sencillos y están bien estudiados en la literatura [DL02]. Sin embargo, muchas veces producen curvas que no satisfacen los requerimientos del diseñador porque se encuentran distantes del polígono inicial, poseen inflexiones indeseadas o incluso puntos singulares. Esto se debe a que las reglas de refinamiento de los esquemas lineales tratan de manera independiente cada una de las coordenadas de los puntos de control. Para enfrentar esta limitación, en los últimos años se ha desarrollado una nueva familia

de esquemas de subdivisión conocidos como esquemas geométricos. Tales esquemas se basan en reglas no lineales, que tienen en cuenta la geometría del polígono de un paso para construir el polígono refinado del siguiente paso.

Muchos autores han notado que la curva límite del esquema de 4 puntos clásico [DLG87] posee en ocasiones oscilaciones indeseadas y tiende a estar muy próxima de las aristas cortas del polígono inicial, mientras que se separa mucho de las aristas largas. Estas limitaciones sirvieron de motivación para proponer en [HEMI09] un esquema geométrico de subdivisión donde se controla la longitud de arco de la curva de subdivisión. Este esquema es interpolatorio y produce curvas tales que la sección comprendida entre dos vértices consecutivos del polígono inicial tiene una longitud de arco proporcional a la longitud de la arista correspondiente, con el mismo factor de proporcionalidad para todas las aristas. De hecho este factor es un parámetro libre que se puede utilizar para controlar la forma y/o la longitud de arco de la curva límite. En [HEMI09] también se demuestra que el esquema propuesto tiene la propiedad de la envoltura convexa y por tanto genera curvas límites sin oscilaciones indeseadas, que además están parametrizadas por un múltiplo de la longitud de arco. Finalmente, el trabajo aporta una cota superior para la distancia de Hausdorff entre la curva de subdivisión y el polígono inicial.

El método de subdivisión propuesto en [HEI13] también se halla dentro de la clase de los esquemas geométricos. Parte de un polígono y un conjunto de tangentes asignadas a sus vértices, y produce una curva con tangente continua que interpola los vértices y las tangentes prefijadas. En ese sentido es un esquema interpolatorio, geométrico, no lineal y Hermítico. Además es una generalización del esquema introducido en [DW10], pero a diferencia de este último dispone de un parámetro libre que permite controlar la forma de la curva de subdivisión. Por otra parte, las curvas producidas por el esquema [HEI13] solamente poseen puntos de inflexión en aquellos segmentos donde esto resulta natural, teniendo en cuenta la geometría del polígono inicial. Además se demuestra que la curva de subdivisión es exactamente un círculo cuando los vértices del polígono inicial están inscritos en un círculo.

El esquema de 4 puntos clásico es un caso particular de la familia de los llamados esquemas de Dubuc-Deslauriers (DD) [DD89]. Estos son esquemas interpolatorios lineales, donde el nuevo punto que se introduce entre dos vértices consecutivos de la poligonal de un paso se obtiene evaluando el polinomio de grado 2n-1 que interpola localmente 2n vértices. Los esquemas DD reproducen polinomios. Con el propósito de incrementar la suavidad de la curva límite, en [DLM90] se introduce la idea de utilizar un parámetro de tensión y estudiar la relación entre el parámetro y el grado de continuidad de la curva a través del esquema de las diferencias. Estos últimos resultados sirvieron de inspiración para la investigación desarrollada en [Díaz15], donde se propone una familia de esquemas de subdivisión que generalizan los esquemas DD para cualquier aridad. La nueva familia DDp se obtiene agregando a las reglas de subdivisión de los esquemas DD una expresión que depende de un parámetro y de las diferencias entre vértices de la poligonal. La presencia del parámetro en los esquemas DDp no disminuye el grado de reproducción de polinomios de los esquemas DD y sin embargo permite en algunos casos aumentar la suavidad de la curva límite. Además los esquemas DDp contienen como casos particulares muchos esquemas binarios y ternarios reportados recientemente en la literatura. Finalmente en [Díaz15] se muestra que la estrategia utilizada para obtener los esquemas DDp se puede extender a la construcción de nuevos esquemas de subdivisión para superficies.

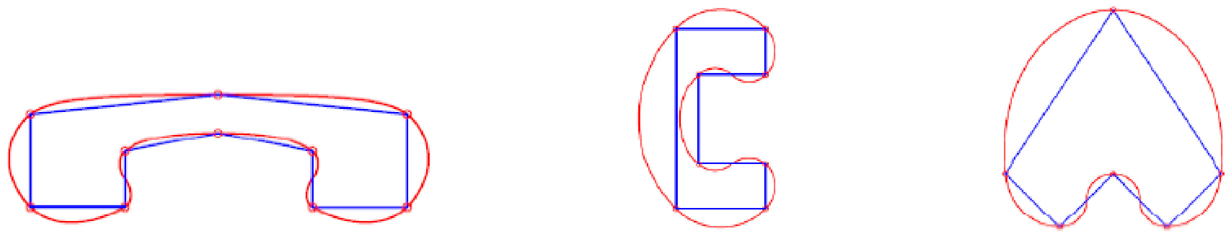

Figura.1: Polígono de control (azul) y curva de subdivisión (roja) generadas con el esquema [HEI13].

Esquemas de subdivisión aproximantes para generar curvas planas.
A diferencia de los esquemas interpolatorios, los esquemas de subdivisión aproximantes producen curvas que no pasan necesariamente por los vértices del polígono inicial. Este tipo de esquema es muy útil en problemas donde los vértices del polígono son puntos afectados por ruido que provienen por ejemplo de la digitalización de una imagen. El esquema de aproximación más conocido es que el produce los B-splines, que es un esquema lineal y estacionario. Para este tipo de esquema existe una teoría basada en el análisis espectral que permite conocer exactamente hacia qué punto sobre la curva de subdivisión converge cada vértice del polígono inicial y cuál es la tangente en ese punto a la curva de subdivisión [DL02]. En los últimos años existe sin embargo un interés creciente en los esquemas de subdivisión no estacionarios, como el que genera los B-splines exponenciales [CR10]. Esto se debe a que tales esquemas son capaces de reproducir secciones cónicas y curvas trigonométricas e hiperbólicas, disponiendo además de parámetros de tensión que permiten controlar la forma de la curva límite y su distancia al polígono inicial [CR11], [Rom09].

Desafortunadamente, para los esquemas de subdivisión no estacionarios no existen en la literatura resultados teóricos que permitan calcular puntos situados exactamente sobre la curva de subdivisión y la tangente a la curva en esos puntos. Esto sirvió de motivación para proponer en [RHE15] una clase de esquemas de subdivisión no estacionarios y aproximantes, llamados NSCB (Non-Stationary generalizations of the Cubic B-spline), que generalizan el esquema clásico de los B-splines cúbicos. La estructura especial de la regla de refinamiento de los esquemas NSCB se utiliza en [RHE15] para obtener expresiones explícitas no sólo de los puntos sobre la curva de subdivisión a los que convergen los vértices del polígono inicial, sino también de la tangente a la curva en esos puntos. Estos resultados teóricos aportan, por primera vez en la literatura, fórmulas para la evaluación exacta de la curva límite de un esquema no estacionario y aproximante. Esto permitiría calcular de forma muy sencilla el offset de una curva generada por un esquema NSCB. Además facilitaría el empleo de los esquemas NSCB en la solución de problemas típicos del diseño geométrico, como la interpolación de puntos en el plano, y en otras áreas más recientes como el análisis isogeométrico. Esto se debe a que la familia NSCB incluye esquemas capaces de generar curvas que tienen hasta segunda derivada continua, que reproducen secciones cónicas, y cuentan con parámetros de tensión global para controlar su forma y/o cuánto se aproximan al polígono de control.

Esquemas de subdivisión para generar curvas sobre superficies.
En diferentes aplicaciones prácticas es necesario diseñar curvas situadas sobre superficie 3D que no es un plano. En este caso las curvas deseadas no se pueden construir empleando esquemas de subdivisión que generan curvas en el espacio Euclideano, pues aún cuando los vértices de la poligonal inicial están sobre la superficie, los nuevos puntos producidos por tales esquemas no viven necesariamente en la misma. En el caso de los esquemas lineales, una forma de enfrentar esta dificultad consiste en sustituir en las reglas de subdivisión la interpolación lineal por la interpolación geodésica sobre la superficie. La idea es sencilla en principio, pero tales esquemas requieren herramientas teóricas más sofisticadas para demostrar su convergencia y estudiar las propiedades de las curvas de subdivisión correspondientes. Adicionalmente, es necesario disponer de algoritmos eficientes para calcular curvas geodésicas, cuestión en la que se ha avanzado mucho en los últimos años cuando se trata de geodésicas sobre superficies trianguladas.

En [MCV07] se introducen las curvas geodésicas de Bezier, que son una extensión natural de las curvas de Bezier en el espacio Euclideano. Inspirados en estas ideas y en el esquema propuesto en [Díaz10], en [EHMVG12] se extienden los resultados al caso racional cuadrático, proponiéndose un esquema de subdivisión para generar curvas geodésicas cónicas. El esquema parte de un polígono inicial (geodésico) con vértices sobre la superficie y emplea reglas de subdivisión basadas en la interpolación geodésica para obtener polígono geodésico refinado. En [EHMVG12] se prueba que si la superficie es C2-continua entonces la curva límite generada por el esquema es C1-continua . Además, en el caso particular en que la superficie es plana, la curva límite es un spline cónico de Bezier. El esquema dispone de parámetros libres para el control local de la forma de la curva de subdivisión. Los resultados se extienden para superficies trianguladas, uno de los estándares para representar superficies en CAGD. En este caso se prueba que el esquema propuesto tiene la propiedad de la envoltura convexa (sobre la superficie) y que genera una curva límite continua con control local de cada una de sus secciones. Esto permite utilizar las curvas geodésicas cónicas como una herramienta eficiente para diseñar la frontera de regiones sobre superficies trianguladas que se desean segmentar, recortar o rellenar.

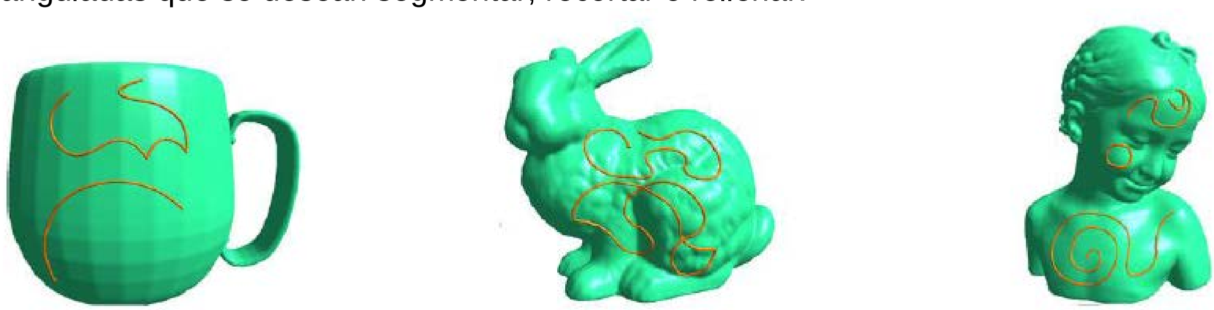

Figura 2: Curvas de subdivisión geodésicas y cónicas (naranja) sobre diferentes superficies trianguladas, generadas con el esquema propuesto en [EHMVG12].

Los esquemas de subdivisión geométricos definidos para generar curvas en un espacio Euclideano también pueden ser extendidos a esquemas que producen curvas sobre superficies 3D. En este caso, puesto que las reglas de subdivisión no son lineales, la estrategia de sustituir la interpolación lineal por la interpolación geodésica no es válida. Se hace entonces necesario traducir las ideas geométricas que subyacen en el esquema definido para el espacio euclideano a la geometría intrínseca de la superficie, en tanto que variedad de dimensión 2 sumergida en el espacio 3D. Tomando como fuente de inspiración el esquema geométrico propuesto en [HEMI09], en [EHMV10] se introduce un nuevo esquema geométrico e interpolatorio muy apropiado para diseñar curvas sobre superficies 3D. En este trabajo se prueba que el esquema converge a una curva continua que posee un parámetro libre para controlar su longitud de arco. Adicionalmente, se demuestra que el esquema tiene la propiedad de la envoltura convexa (sobre la superficie), de modo que la curva límite carece de oscilaciones indeseadas. Por otro lado, el mismo proceso de subdivisión aporta una parametrización de la curva límite que aproxima a la parametrización por la longitud de arco, sin aumentar significativamente el costo computacional. Finalmente, en el trabajo se obtiene una cota superior para la distancia de Hausdorff entre la curva de subdivisión y el polígono inicial.

Referencias Bibliográficas

[CR10] Conti C., Romani L. Affine combination of B-spline subdivision masks and its non-stationary counterparts. BIT, 50(2), 269–299, 2010.

[CR11] Conti C., Romani L. Algebraic conditions on non-stationary subdivision symbols for exponential polynomial reproduction. J. Comput. Applied Math.,236, 543–556, 2011.

[Díaz10] Díaz Fuentes R. Esquema de subdivisión interpolatorio con parámetro de tensión local basado en spline cónico. Tesis de Licenciatura en Matemática. Universidad de La Habana, junio 2010.

[Díaz15] Díaz Fuentes R. Perturbación de los esquemas de Dubuc-Deslauriers para cualquier aridad. Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas. Universidad de La Habana, julio 2015.

[DD89] Deslauriers G., Dubuc S. Symmetric iterative interpolation processes. Constructive Approximation, 5(1):49-68, 1989.

[DW10] Deng C. , Wang G.. Incenter subdivision scheme for curve interpolation. Computer Aided Geometric Design, 27:48–59, 2010.

[DLM90] Dyn N., Levin D., Micchelli C. A.. Using parameters to increase smoothness of curves and surfaces generated by subdivision. Computer Aided Geometric Design, 7(1-4):129-140, 1990.

[DLG87] Dyn N., Levin D., Gregory J.A. A four-point interpolatory subdivision scheme for curve design, Computer Aided Geometric Design 4:257–268, 1987.

[DL02] Dyn N., Levin D. Subdivision schemes in geometric modelling. Acta Numerica, 11:73–144, 2002.

[EHMV10] Estrada J., Hernández V., Martínez D., Velho L. Subdivision de courbes sur les surfaces avec contrôle de la longueur d' arc, Revue Électronique Francophone d' Informatique Graphique, Volume 4, No 1, 65-72, 2010.

[EHMVG12] Estrada J., Hernández V., Martínez D., Velho L., López N. Conic-like subdivision curves on surfaces, The Visual Computer, Vol. 28 , No. 10, 971–982, 2012.

[HEMI09] Hernández V., Estrada J., Morales S., Ivrissimtzis I. Curve subdivision with arc-length control. Computing. Archives for Scientific Computing. Vol. 86, No. 2-3, 151-169, 2009.

[HEI13] Hernández, V., Estrada, J., Ivrissimtzis, I. Generalization of the incenter subdivision scheme, Graphical Models, 75, 79-89, 2013.

[LR80] Lane J., Riesenfeld R. A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Int. 2 (1), 35-46, 1980.

[MCV07] Martínez D., Carvalho P. C., Velho L. Geodesic Bezier Curves: a Tool for Modeling on Triangulations. Computer Graphics and Image Processing, SIBGRAPI 2007, 71-78, 2007.

[Rom09] Romani L. From approximating subdivision schemes for exponential splines to high-performance interpolating algorithms. J. Comput. Applied Math., 224, 383–396.

[RHE15] Romani L., Hernández V., Estrada J. Exact evaluation of a class of nonstationary approximating subdivision algorithms and related applications, IMA J Numerical Analysis. doi:10.1093/imanum/drv008. Advance Access published March 11, 2015.

[Sab10] Sabin M. Analysis and Design of Univariate Subdivision Schemes, Springer- Verlag, 2010.

Publicaciones

Publicaciones en Revistas

1. Curve subdivision with arc-length control, V. Hernández, J. Estrada, S. Morales, I. Ivrissimtzis, Computing. Archives for Scientific Computing. Vol. 86, No. 2-3, 151-169, 2009.
2. Subdivision de courbes sur les surfaces avec contrôle de la longueur d' arc, J. Estrada-Sarlabous, V. Hernández-Mederos, D. Martínez-Morera, L. Velho. Revue Électronique Francophone d' Informatique Graphique, Volume 4, No 1, 65-72, 2010.
3. Conic-like subdivision curves on surfaces, J. Estrada, V. Hernández, D. Martínez, L. Velho, N. López, The Visual Computer, Vol. 28 , No. 10, 971–982, 2012.
4. Generalization of the incenter subdivision scheme, V. Hernández, J. Estrada, I. Ivrissimtzis, Graphical Models, 75, 79-89, 2013.
5. Exact evaluation of a class of nonstationary approximating subdivision algorithms and related applications, L. Romani, V. Hernández, J. Estrada, IMA J Numerical Analysis. doi:10.1093/imanum/drv008. Advance Access published March 11, 2015.

Publicaciones en Memorias de eventos

1. Geodesic Conic Subdivision Curves on Surfaces, J. Estrada, V. Hernández, D. Martínez, L. Velho, N. López, Sibgrapi 2011, Proceedings 24 Conference on Graphics, Patterns and Images, 56-63, Editors T. Lewiner, R. Torres, Maceio, Brasil, IEEE, ISBN 978-0-7695-4548-6, 2011.
2. Esquemas de subdivisión ternarios de n puntos con parámetro, R. Díaz, L. Romani. COMPUMAT 2013. ISBN 978-959-286-022-3, 2013.
3. Factorización del símbolo del esquema de subdivisión binario de Dubuc-Deslauriers de (n + 1)-puntos. R. Díaz, J. Estrada. Aprobado para publicarse en las Memorias de COMPUMAT 2015.

Tesis

1. Esquema de subdivisión interpolatorio con parámetro de tensión local basado en spline cónico, R. Díaz Fuentes. Tesis de Licenciatura en Matemática. Universidad de La Habana, junio 2010. Tutor: J. Estrada Sarlabous.
2. Perturbación de los esquemas de Dubuc-Deslauriers para cualquier aridad, R. Díaz Fuentes. Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas. Universidad de La Habana, julio 2015. Tutores: L. Romani, J. Estrada Sarlabous.

Presentaciones en eventos

1. Subdivision curves with control of the arc-length, V. Hernández, J. Estrada, S. Morales, I. Ivrissimtzis. Dagstulh Seminar on Geometric Modeling, Alemania, mayo 2008. http://www.dagstuhl.de/en/program/calendar/semhp/?semnr=08221
2. Subdivision de courbes sur les surfaces avec controle de la longueur d´arc", J. Estrada, V. Hernández. 22e Journees de l' Association Francaise d' Informatique Graphique, AFIG´09, Arles, Francia, nov. de 2009.
3. Esquemas de subdivisión de curvas con control de la longitud de arco, J. Estrada, V. Hernández. 3er Encuentro CIMAT-ICIMAF, La Habana, abril 2009.
4. Geodesic Conic Subdivision Curves on Surfaces, J. Estrada, V. Hernández, D. Martínez, L. Velho, N. López, 24 Conference on Graphics, Patterns and Images (SIBGRAPI), Maceio, Brasil, 2011.
5. Generalization of the incenter subdivision scheme, V. Hernández, J. Estrada, I. Ivrissimtzis. Dagstulh Seminar on Geometric Modeling, Alemania, mayo 2011. http://www.dagstuhl.de/en/program/calendar/semhp/?semnr=11211
6. Esquemas de subdivisión ternarios de n puntos con parámetro, R. Díaz, L. Romani. COMPUMAT 2013.
7. Evaluación exacta de una clase de algoritmos de subdivisión no estacionarios, L. Romani, V. Hernández, J. Estrada, IV Encuentro Cuba-México de Métodos Numéricos y Optimización, La Habana, enero 2015.