Las ecuaciones de Maxwell y el operador de Dirac sobre dominios con fronteras irregulares

Autores principales
Ricardo Abreu Blaya[1], Juan Bory Reyes[2].

Otros autores
Rafael Ávila Ávila[1], Tania Moreno García[1], Alí Guzmán Adán[3], Uwe Kähler[4].

Entidad ejecutora principal
[1]Universidad de Holguín, Cuba.

Entidades participantes
[2]Instituto Politécnico Nacional, SEPI-ESIME-ZAC, DF, México.
[3]Universidad de Gent, Bélgica.
[4]Universidad de Aveiro, Portugal.

Resumen

El análisis de Clifford, usando álgebras de Clifford nombradas así después de William Kingdon Clifford, es el estudio de operadores del tipo Dirac en análisis y geometría. El ejemplo más básico de un operador de Dirac es el operador de Cauchy Riemann. En 3 y 4 dimensiones el análisis de Clifford es llamado en ocasiones análisis quaterniónico.

Por más de un siglo, el análisis cuaterniónico ha probado ser una eficiente herramienta para tratar una amplia clase de problemas de frontera en casi todas las ramas de la física y la ingeniería, por ejemplo, en electromagnetismo, óptica, elasticidad, dinámica de fluidos, hidroacústica y geofísica.

En particular, en una serie de trabajos, se ha utilizado el análisis cuaterniónico para estudiar las ecuaciones de Maxwell armónicas en el tiempo (monocromáticas). Deben mencionarse también varios trabajos dirigidos a la investigación de las ecuaciones de Helmholtz y de Beltrami a partir de un enfoque hipercomplejo y explotando la posibilidad de factorización de estos operadores (al igual que lo fuera para el operador de Laplace) en términos del operador de Dirac. Sin embargo, debe hacerse notar que el estudio de problemas de frontera de estos modelos físicos ha estado esencialmente confinado a dominios con fronteras suficientemente suaves y dominios de Lipschitz en el peor de los casos.

Resulta motivante e importante salir del marco que imponen estas restricciones geométricas por el interés que despiertan, tanto desde el punto de vista puramente matemático como del asociado a las diversas aplicaciones que puedan generarse a partir de la búsqueda de sus soluciones.

La naturaleza geométrica de las fronteras de los dominios del mundo real suele ser mucho más complicada que la asumida a través de los modelos clásicamente considerados en la literatura. En esta propuesta se debilitan sustancialmente estas restricciones geométricas y se ofrecen alternativas para el estudio de problemas de frontera asociados a las ecuaciones de Maxwell, Helmholtz y Beltrami.

El presente trabajo se resume en 16 publicaciones en revistas internacionales, 11 de las cuales son revistas indexadas por el ISI-Web of Science con alto indice de impacto y publicadas entre los años 2014 y 2015, fruto de la colaboración de los autores principales de la propuesta con especialistas de Bélgica, México, Portugal, Rusia y Turquía.

El resultado presentado tiene antecedentes en las investigaciones del Grupo Cubano en Análisis Complejo, Hipercomplejo y de Clifford, premiadas por la ACC, en los años 2000, 2003, 2006, 2009 y 2012, pero el mismo constituye una contribución significativamente nueva con una importante incursión en problemas de las ciencias físicas, mostrando una vez más las posibilidades de aplicación de las técnicas elaboradas en el Análisis de Clifford.

Comunicación corta

Introducción

Como parte de esta propuesta se explota la conexión entre los campos electromagnéticos y las funciones cuaterniónicas α-hiperholomorfas. Aunque se restringe la discusión para el caso monocromático, de gran importancia en la propagación de ondas y otras muchas ramas de la física, existen razones suficientes para esperar que el método elaborado se aplica a una gran variedad de situaciones.

En el caso tiempo-armónico con dependencia temporal dada a través de $e^{-i\omega t}$, las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético se reducen a las siguientes ecuaciones para sus amplitudes complejas $\vec{E}$ y $\vec{H}$

$$\operatorname{curl} \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{j} \tag{1}$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{4}$$

Aquí ε y μ denotan la permitividad y permiabilidad absolutas del medio, y las cantidades ρ y $\vec{j}$ que caracterizan las fuentes, dependen solo de las variables espaciales. En realidad, las magnitudes ρ y $\vec{j}$ están conectadas por la relación

$$\operatorname{div} \vec{j} = i\omega\rho.$$

Kravchenko desarrolló un método para reducir el sistema de ecuaciones de Maxwell (1)-(4) a las ecuaciones equivalentes

$$D_{-\alpha}\vec{\varphi} = \mathrm{div}\vec{j} + \alpha\,\vec{j} \tag{5}$$

y

$$D_{\alpha}\vec{\psi} = -\mathrm{div}\vec{j} + \alpha\,\vec{j}, \tag{6}$$

donde $\vec{\varphi} = -i\omega\varepsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}$, $\vec{\psi} = i\omega\varepsilon\vec{E} + \alpha\vec{H}$ y $\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ es el llamado número de onda.

La técnica de Kravchenko no puede ser usada en el caso de considerar una frontera irregular, pues la misma descansa esencialmente en la posibilidad de utilizar la transformada de Cauchy subyacente al análisis cuaterniónico, y esta última no está definida en fronteras fractales.

Una clase de fronteras en las que es posible mediante otras técnicas abordar problemas de contorno para las ecuaciones de Maxwell, es la dada a través de la condición de d-sumabilidad:

$$\int_0^1 N_\Gamma(\tau)\,\tau^{d-1}\,d\tau < \infty,$$

donde $N_\Gamma(\tau)$ denota el número mínimo de bolas de radio τ necesarias para cubrir Γ.

Es importante remarcar que en estas fronteras se contiene una amplia clase de conjuntos fractales como las curvas de Koch y sus versiones multidimensionales.

En el caso 3-dimensional, particularmente importante, se puede seguir una construcción similar a la clásicamente desarrollada en el caso plano y producir un copo de nieve de Koch $\mathbf{K}$ en $\mathbb{R}^3$ con frontera fractal $\partial\mathbf{K}$ de dimensión de Hausdorff

$$\frac{\log 6}{\log 2} = 2;584962500721156181453738943947 8\ldots$$

Consecuentemente, esto implica que $\partial\mathbf{K}$ es d sumable para

$$d = \frac{\log 6}{\log 2} + \varepsilon,$$

siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario.

El siguiente teorema resume el principal resultado obtenido en esta propuesta sobre el problema de Dirichlet para las ecuaciones de Maxwell monocromáticas en dominios con frontera fractal d-sumable.

Teorema 1.1 *Sean ρ y $\vec{j}$ en $L^p(\Omega)$ $(p > 3)$. Sean además $\vec{e}$ y $\vec{h}$ funciones vectoriales complejas en $C^{0,\nu}(\Gamma)$ y*

$$\beta := \mathrm{mín}\{\nu, \frac{p-3}{p}\} > \frac{d}{3}.$$

Si existe el par de campos vectoriales $\vec{E}$ y $\vec{H}$, ambos en $C^{0,\nu}(\Omega\cup\Gamma)$, tales que satisfacen en Ω las ecuaciones de Maxwell monocromáticas (1)-(4) y sobre Γ las condiciones de frontera

$$\vec{E}|_\Gamma = \vec{e},\ \vec{H}|_\Gamma = \vec{h}, \tag{7}$$

entonces

$$\mathcal{T}_{-\alpha}\,D_{-\alpha}(-i\omega\varepsilon\tilde{\vec{e}} + \alpha\tilde{\vec{h}})|_\Gamma = \mathcal{T}_{-\alpha}(\mathrm{div}\vec{j} + \alpha\vec{j})|_\Gamma, \tag{8}$$

$$Sc(\mathcal{T}_{-\alpha}\,D_{-\alpha}(-i\omega\varepsilon\tilde{\vec{e}} + \alpha\tilde{\vec{h}})) = Sc(\mathcal{T}_{-\alpha}(\mathrm{div}\vec{j} + \alpha\vec{j}))\ \mathit{in}\ \Omega \tag{9}$$

y

$$\mathcal{T}_\alpha D_\alpha(i\omega\varepsilon\tilde{\vec{e}} + \alpha\tilde{\vec{h}})|_\Gamma = \mathcal{T}_\alpha(-\mathrm{div}\vec{j} + \alpha\vec{j})|_\Gamma \tag{10}$$

$$Sc(\mathcal{T}_{-\alpha} D_{-\alpha}(i\omega\varepsilon\tilde{\vec{e}} + \alpha\tilde{\vec{h}})) = Sc(\mathcal{T}_{-\alpha}(-\mathrm{div}\vec{j} + \alpha\vec{j})) \ in\ \Omega \tag{11}$$

Aquí $\mathcal{T}_\alpha$ *denota el operador de Teodorescu definido por:*

$$\mathcal{T}_\alpha u(\underline{x}) = \int\limits_\Omega E_\alpha(\underline{y} - \underline{x})u(\underline{y})dV(\underline{y})$$

Por otro lado, si (8)-(11) se satisfacen, entonces los campos vectoriales

$$\begin{aligned}\vec{E} = \tilde{\vec{e}} - \frac{1}{2i\omega\varepsilon}\{i\omega\varepsilon(\mathcal{T}_\alpha D_\alpha + \mathcal{T}_{-\alpha} D_{-\alpha})(\tilde{\vec{e}}) + \alpha(\mathcal{T}_{-\alpha} D_{-\alpha} - \mathcal{T}_\alpha D_\alpha)(\tilde{\vec{h}}) - \\ -(\mathcal{T}_\alpha + \mathcal{T}_{-\alpha})(\mathrm{div}\vec{j}) + \alpha(\mathcal{T}_\alpha - \mathcal{T}_{-\alpha})(\vec{j})\}\end{aligned} \tag{12}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{H} = \tilde{\vec{h}} - \frac{1}{2\alpha}\{i\omega\varepsilon(\mathcal{T}_{-\alpha} D_\alpha - \mathcal{T}_\alpha D_{-\alpha})(\tilde{\vec{e}}) - \alpha(\mathcal{T}_{-\alpha} D_{-\alpha} + \mathcal{T}_\alpha D_\alpha)(\tilde{\vec{h}}) - \\ -(\mathcal{T}_\alpha - \mathcal{T}_{-\alpha})(\mathrm{div}\vec{j}) + \alpha(\mathcal{T}_\alpha + \mathcal{T}_{-\alpha})(\vec{j})\}\end{aligned} \tag{13}$$

satisfacen las ecuaciones de Maxwell (1)-(4) junto con las condiciones de frontera (7)

Separar las partes vectoriales en (12) y (13) nos permite reescribirlas en términos puramente vectoriales. Las fórmulas resultantes pueden ser entendidas como una reformulación fractal de las famosas fórmulas de Stratton-Chu, las cuales poseen múltiples aplicaciones en diferentes tipos de problemas de frontera para las ecuaciones de Maxwell.

En esta propuesta también se obtiene un análogo tridimensional de la fórmula de Cauchy en el caso de campos vectoriales electrostáticos asociados a la polarización de un material dieléctrico, contenido en un dominio acotado por una superficie rectificable. Los resultados se aplican en el cálculo de la intensidad del campo eléctrico generado por materiales dieléctricos y debido a una distribución de carga en dominios volumétricos de $\mathbb{R}^3$.

Otro de los resultados a resaltar de esta propuesta es que se analiza el problema de Dirichlet para el campo electromagnético en el caso de considerar un polígono curvo y plano a través de una ecuación de Dirac en coordenadas elípticas. La ventaja de esta técnica consiste en el hecho de que las coordenadas elípticas utilizadas transforman la poligonal curva a una poligonal limitada por segmentos rectos.

La difusión, difracción y regularización de las ecuaciones de Maxwell por poligonales curvas está frecuentemente presente en la literatura sobre elecetromagnetismo. Estos son ejemplos donde el enfoque presentado en la presente propuesta puede ser aplicado.

Uno de los problemas tratados en esta propuesta incluye la factorización de la ecuación de Helmholtz a través del operador de Dirac modificado bidimensional ∂_{α_0}. La consideración de un problema no homogéneo de Dirichlet sobre dominios fractales para este caso conduce al siguiente resultado:

Teorema 1.2 *Sea Ω un dominio de Jordan en $\mathbb{R}^2$ con frontera d-sumable Γ, $d \in]1,2[$. Además, sea $d-1 < \nu \leq 1$ y asumamos $G \in C^{0,\nu}(\Gamma, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ y $F \in L_p(\Gamma, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ de modo que ν y $\frac{p-2}{p}$ son ambos mayores que $\frac{d}{2}$. Si existe $f \in C^{0,\nu}(\overline{\Omega}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ solución del problema de Dirichlet*

$$\partial_{\alpha_0}[f] = F, \quad en \quad \Omega, \tag{14}$$

$$f = G, \quad sobre \quad \Gamma, \tag{15}$$

entonces

$$[K^*_{\alpha_0}]^-[G](x,y) = -T_{\alpha_0}[F](x,y), \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{16}$$

Contrariamente, si (16) se satisface, entonces existe una función $f \in C^{0,\mu}(\overline{\Omega}, \mathbb{H}(\mathbb{C}))$ $(\mu < \nu)$ que es solución del problema 14-15.

Son además parte de esta propuesta algunas generalizaciones de este resultado para el caso multidimensional (n > 2), donde se emplea el enfoque hermítico del análisis cuaterniónico y se ofrecen condiciones necesarias y suficientes para la solubilidad de problemas de frontera del tipo Dirichlet para operadores matriciales de Dirac.

A modo de ejemplos, modernos aparatos con geometría plana fractal lo constituyen las antenas fractales. Las primeras ideas relacionadas con estos aparatos fueron propuestas hace más de 15 años, sin embargo la teoría electromagnética de estas antenas no está aún muy desarrollada. El enfoque teórico que se ofrece en esta propuesta puede ayudar a la comprensión de estos problemas de importantes aplicaciones prácticas.

Los resultados principales están contenidos en los artículos que se listan a continuación. Las referencias bibliográficas y las fuentes utilizadas están cuidadosamente documentadas en los mismos.

Acreditación de los resultados

A-[ISI-Web de Ciencias]

a-Science Citation Index y/o SCI Expanded

[1] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes. Clifford analysis approach to Self conjugate Cauchy type integral on Ahlfors regular surfaces, Ann. Polon. Math, 101, 2, 101-108, 2014.

[2] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; T. Moreno García, Y. Peña Pérez. Analytic Riemann boundary value problem on h-summable closed curves, Appl. Math. Comput., 227, 593-600, 2014.

[3] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; F. Brackx; H. De Schepper; T. Moreno García; F. Sommen. Dirichlet type problems in Hermitean Clifford analysis, J. Math. Anal. Appl., 417, no. 1, 439-450, 2014.

[4] J. Bory Reyes; P. Cerejeiras; A. Guzmán Adán; U. Kähler. A short note on the local solvability of the quaternionic Beltrami equation, Adv. Appl. Clifford algebras, 24, no 4, 945-953, 2014.

[5] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes. On boundary value problems for perturbed Hermitian Matrix Dirac equation in a fractal domain, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin Bull., 21, no 4, 733-746, 2014.

[6] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; F. Brackx; H. De Schepper; T. Moreno García; F. Sommen. Boundary value problems on fractal hypersurfaces for the quaternionic Hermitian system in R4n, Compl. Anal. Oper. Theory, Volume 9, Issue 5, 957-973, 2015.

[7] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; R. Ávila Ávila; R. M. Rodríguez Dagnino. 2D Quaternionic time-harmonic Maxwell system in elliptic coordinates, Adv. Appl. Clifford algebras, Vol. 25, Issue 2, 255-270, 2015.

[8] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; B. Kats. Cauchy Integral and the Singular Integral Operator over closed Jordan curves, Monatsh Math, 176, no 1, 1-15, 2015.

[9] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes; R. Ávila Ávila. Boundary value problems for Dirac operators and Maxwell's equations in fractal domains, Math. Methods Appl. Sci., 38, no 3, 393-402, 2015.

[10] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; R. M. Rodríguez Dagnino. Boundary value problems for hyperholomorphic solutions of two dimensional Helmholtz equation in a fractal domain, Appl. Math. Comput., 261, 183-191, 2015.

[11] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; A. Guzmán Adán; U. Kähler. On some structural sets and a quaternionic (';)-hyperholomorphic function theory, Math. Nach.. (2015) DOI 10.1002/mana.201300072.

b- Conference Proceedings Citation Index-Science

[1] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; A. Guzmán Adán; U. Kähler. Symmetries and associated pairs in quaternionic analysis, Hypercomplex Analysis: New perspectives and applications, Trends in Mathematics, 1-18, Birkhäuser (Basel), 2014.

B-[SCOPUS, Zentralblatt Math y/o Mathematical Reviews.]

[1] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; B. Schneider. On Cauchy type integrals related to the Cimmino system of partial differential equations, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser, Basel, Vol. 242, 81-92, 2014.

[2] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes; J.M. Vilaire. Hölder norm of a fractal Hilbert transform in Douglis analysis. Comm. Math. Anal., 16, no. 2, 1-8, 2014.

[3] R. Abreu Blaya; R. Ávila Ávila; J. Bory Reyes Acerca de un análogo tridimensional de la fórmula integral de Cauchy y su aplicación a la electrostática, Rev. Cub. Fís., 31 No 1 E, E42, 2014.

[4] R. Abreu Blaya; J. Bory Reyes. Quaternionic and Clifford analysis for non-smooth domains, Springer-References. (2015) doi: 10,1007/978 - 3 - 0348 - 0692 - 3 31 - 1.

Premios y Reconocimientos

Ricardo Abreu Blaya. Premio Anual por la Tesis de Doctor en Ciencias defendida en el período comprendido entre el 1ro de septiembre de 2012 y el 31 de agosto de 2013.